אסימפטוטות

גיא רוטנברג - http://www.sikumuna.co.il

2006

אסימפטוטה בפשטות היא קו אליו מתקרבת הפונקציה בנקודות אי־הגדרה או באינסוף ובעזרתה אנו יכולים להעריך את הפונקציה. ובאופן יותר מדוייק קו A יקרא אסימפטוטה לעקומה אם המרחק בין העקומה ל־ A שואף לאפס בנקודה השואפת לאינסוף על העקומה.
כעת נדון באסימפטוטות משופעות ואנכיות וניתן הגדרות מדוייקות לשתיהן איתן ניתן לעבוד.

1 אסימפטוטה משופעת

הגדרה 1.1 אסימפטוטה משופעת ־ הישר $y = ax + b$ יקרא אסימפטוטה משופעת לפונקציה f ב־ ∞ אם

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$$

באופן דומה נגדיר:
הישר $y = ax + b$ יקרא אסימפטוטה משופעת לפונקציה f ב־ $-\infty$ אם

$$\lim_{x\to-\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$$

מההגדרה לא ניתן להבין איך למצוא את הישר המתאים להיות אסימפטוטה, אך מציאת הישר הינה פשוטה וזהו עיניין טכני בלבד. על ידי פעולות שלא אפרט כאן מקבלים שניתן לחשב את המקדמים של האסימפטוטה (a ו־ b) על ידי חישוב גבולות פשוט:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\infty} f(x) - ax \end{aligned}$$

השיטה הנ"ל נכונה גם למציאת אסימפטוטה ב־ $-\infty$. אם הגבולות הנ"ל קיימים (סופיים) אז קיימת אסימפטוטה, אך אם אחד מן הגבולות האלו אינו קיים אז לא קיימת אסימפטוטה לעקומה.

2 אסימפטוטה אנכית

הגדרה 2.1 אסימפטוטה אנכית[1] ־ הישר $x = a$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה בנקודה a אם

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$$

[1] הגדרה זו מתבססת על "חשבון אינפיטיסימלי I" בהוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

אסימפטוטה אנכית, כתוצאה מהגדרתה, יכולה להתקיים רק בנקודות בהם יש אי רציפות ממין שני (כלומר לא נקודת אי רציפות סליקה "חור" ולא נקודה בה יש גבול סופי לפונקציה משני הצדדים).

3 דוגמאות

דוגמא 1 נמצא את האסמיפטוטות (אם קיימות) לפונקציה $f(x) = \frac{3x^2+5}{x-7}$. ברור כי $\lim_{x\to 7}|f(x)| = \infty$ ולכן לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית ב־$x = 7$. ניתן לראות בקלות כי אין עוד אסימפטוטות אנכיות.
נחפש אסימפטוטה ב־ ∞.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{x(x-7)} = 3 \\ b &= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{x-7} - 3x = \lim_{x\to\infty} \frac{21x+5}{x-7} = 21 \end{aligned}$$

ולכן הישר $y = 3x + 21$ הוא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה ב־ ∞. קל להראות שזו גם האסימפטוטה ב־ $-\infty$.

דוגמא 2 נמצא את האסימפטוטות (אם קיימות) לפונקציה $f(x) = \frac{4-x^2}{(x-2)(2x-3)}$. ניתן לראות כי

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} |f(x)| = \infty$$

ולכן בנקודה $x = \frac{3}{2}$ יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית. בנקודה $x = 2$ אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית כיוון שמתקיים

$$\lim_{x\to 2} |f(x)| = \lim_{x\to 2} \left|\frac{4-x^2}{(x-2)(2x-3)}\right| = \lim_{x\to 2}\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| = 4$$

נחפש כעת אסימפטוטות משפועות. מתקיים

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{4-x^2}{x(x-2)(2x-3)} = 0 \\ b &= \lim_{x\to\infty} \frac{4-x^2}{(x-2)(2x-3)} - 0\cdot x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

מכאן שהישר $y = \frac{1}{2}$ הוא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה ב־ ∞. ניתן להראות בקלות שזו גם האסימפטוטה של הפונקציה ב־ $-\infty$.

דוגמא 3 נמצא את האסימפטוטות (אם קיימות) לפונקציה $\tan x$. הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ כאשר k שלם. כמו כן ניתן לראות כי לכל k שלם מתקיים

$$\lim_{x\to\pi/2+k\pi} |\tan x| = \infty$$

ולכן לפונקציה $\tan x$ יש אסימפטוטות אנכיות בכל $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ כאשר k שלם.

לפונקציה אין אסימפטוטות משופעות כיוון שהגבולות $\lim_{x\to\infty} \frac{|\tan x|}{x}$ ו־ $\lim_{x\to-\infty} \frac{|\tan x|}{x}$ אינם קיימים.

דוגמא 4 נמצא את האסימפטוטות (אם קיימות) לפונקציה $f(x) = \frac{10x}{\sqrt{x^2+1}}$. ניתן לראות שהפונקציה רציפה לאורך כל ציר המספרים ולכן אין לה אסימפטוטות אנכיות. נבדוק לאסימפטוטות משופעות. מתקיים

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{10x}{x\sqrt{x^2+1}} = 0 \\ b &= \lim_{x\to\infty} \frac{10x}{\sqrt{x^2+1}} - 0x = 10 \end{aligned}$$

מכאן שהישר $y = 10$ הוא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה ב־ ∞. כמו כן מתקיים גם

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to-\infty} \frac{10x}{x\sqrt{x^2+1}} = 0 \\ b &= \lim_{x\to-\infty} \frac{10x}{\sqrt{x^2+1}} - 0x = -10 \end{aligned}$$

מכאן שהישר $y = -10$ הוא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה ב־ $-\infty$.
