מתמטיקה בדידה-סיכומונה

יחסים

יחס רפלקסיבי:

יחס R על קבוצה A נקרא רפלקסיבי אם לכל $x \in A$ מתקיים xRx.

יחס R על קבוצה A הוא רפלקסיבי אמיתי $I_A \subseteq R$.

מספר היחסים הרפלקסיבים הניתן להגדיר על קבוצה n הוא 2^{n^2-n}.

יחס סימטרי:

יחס R על קבוצה A נקרא סימטרי אם לכל $x, y \in A$ המקיימים xRy מתקיים yRx.

יחס R על קבוצה A הוא סימטרי אם ורק אם $R = R^{-1}$.

אם R סימטרי אז גם R^2 סימטרי, $R^2 = (R^2)^{-1}$.

מספר היחסים הסימטרים הניתן להגדיר על קבוצה n הוא $2^{\frac{n^2+n}{2}}$.

יחס אנטי-סימטרי:

יחס R על קבוצה A נקרא אנטי -סימטרי אם לכל $x, y \in A$ המקיימים xRy וגם $x \neq y$ מתקיים $(y, x) \notin R$.

יחס R אנטי –סימטרי אם לא קימים $x, y \in A$ שונים כך ש- xRy וגם yRx.

יחס R על קבוצה A הוא אנטי –סימטרי אם ורק אם $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

יחס R על קבוצה A הוא סימטרי וגם אנטי –סימטרי אם ורק אם $R \subseteq I_A$

יחס טרנזיטיבי:

יחס R על קבוצה A נקרא טרנזיטיבי אם לכל $x, y, z \in A$ המקיימים xRy וגם yRx מתקיים xRz.

יחס R על קבוצה A הוא טרנזיטיבי אם ורק אם $R^2 \subseteq R$.

בניית יחס טרנזיטיבי מינמלי שמכיל את R על קבוצה A סופית בעלת n איברים $R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 ...... \cup R^n$.

<u>יחס שקילות:</u>
יחס R על קבוצה A נקרא יחס שקילות אם הוא:

1. רפלקסיבי
2. סימטרי
3. טרנזיטיבי

אם R הוא יחס שקילות על A ואם $x \in A$, מגדירים את מחלקת השקילות $[x] = \{ y \in A \mid yRx \}$.
כל שתי מחלקות שקילות שונות הן זרות.

אם R יחס שקילות על $A \neq \phi$ אז אוסף מחלקות השקילות של R הוא חלוקה של הקבוצה A.

<u>יחס סדר:</u>
יחס R על קבוצה A נקרא יחס שקילות אם הוא:

1. רפלקסיבי
2. אנטי-סימטרי
3. טרנזיטיבי

נניח ש –A קבוצה שעליה מוגדר יחס סדר חלקי R:

1. איבר $a \in A$ נקרא <u>מינימלי</u> אם לכל $x \in A$ מתוך xRa נובע ש- $x = a$.
2. איבר $b \in A$ נקרא <u>מקסימלי</u> אם לכל $x \in A$ מתוך xRa נובע ש- $x = b$.

אם A קבוצה סופית ו-R יחס סדר על A, אז קיים ב-A איבר מקסימלי וגם איבר מינימלי.

1. איבר $m \in A$ נקרא <u>איבר קטן ביתור</u> אם לכל $x \in A$ מתקיים mRx .
2. איבר $m \in A$ נקרא <u>איבר גדול ביתור</u> אם לכל $x \in A$ מתקיים xRm .

האיבר קטן ביתור הוא תמיד גם איבר מינמלי.
האיבר גדול ביתור הוא תמיד גם איבר מקסימלי.

קבוצה A עם סדר חלקי נקראת סדורה היטב אם לכל קבוצה לא ריקה B שחלקית ל-A יש איבר קטן ביותר.

קומבינטוריקה

תמורות עם חזרה וחשיבות לסדר:

מספר הצורות שניתן לבחור k עצמים (לא שונים) מתוך n עם חשיבות לסדר - n^k

$|A|^n$

- ✓ מספר המדגמים הסדורים עם החזרה, בגודל n מתוך A.
- ✓ מספר כל המילים באורך n הכתובות באותיות מתוך A. (מילים הן מחרוזות עם חשיבות הסדר שלהן ומותר כפילויות של אותיות)
- ✓ מספר כל הפונקציות מהקבוצה $\{1,2,3,4,.....,n\}$ ל-A.

תמורות ללא חזרות וחשיבות לסדר:

מספר הצורות שניתן לבחור k עצמים שונים מתוך n עם חשיבות לסדר. $[n]_k = p(n,k) = n(n-1)(n-2).....(n-(k-1))$

פישוט המשוואה רק באשר k קטן שווה ל-n - $[n]_k = p(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

תמורות בשורה - מספר התמורות של n עצמים שונים עם חשיבות לסדר הוא n!.

תמורות במעגל - מספר התמורות של n עצמים שונים עם חשיבות לסדר הוא $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

תמורות ללא חזרות ואין חשיבות לסדר:

מספר הצורות שניתן לבחור k עצמים שונים מתוך n ללא חשיבות לסדר.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הבינום של ניטון – המקדם $x^k y^{n-k}$ בפיתוח של $(x+y)^n$ הוא $\binom{n}{k}$, ומספר האיברים השונים הוא n+1

תמורות עם חזרה ואין חשיבות לסדר:

מספר הצורות שניתן לבחור n עצמים (לא שונים) מתוך k ללא חשיבות לסדר.

וזה שקול למספר הפיזורים של n כדורים זהים ב-k תאים שונים.

$$D(n,k) = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

עקרון ההכלה והפרדה:

לכל n קבוצות סופיות $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ מתקיים –

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 ...... \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 .....(-1)^{n-1} S_n$$

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| ......+ |A_n|$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| +......+ |A_1 \cap A_n| +.....+ |A_{n-1} \cap A_n|$$

$$S_k = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ......A_k| +.....+ |A_{n-k+1} \cap ..... \cap A_n|$$

$$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ......A_n|$$

אם n מספר טבעי גדול שווה ל-2 וכל הגורמים הראשונים שלו הם $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ אז מספר המספרים הטבעים הקטנים מ-n וזרים לו הוא: $p(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})....(1-\frac{1}{p_k})$