

טבלת אינטגרלים מורחבת

גיא רוטנברג

ספטמבר 2006

מטעמי נוחות הושמט קבוע האינטגרציה בכל הנוסחאות. כמו כן בכל מקום שבו מופיע בתוך אגף ימין $\ln$ יש להוסיף ערך מוחלט לביטוי בתוך ה- $\ln$

תוכן עניינים

1	אינטגרלים אלמנטריים ונוסחאות יסוד	1
3	אינטגרלים המכילים ביטויים מהצורה $ax + b$	2
5	אינטגרלים המכילים ביטויים מהצורה $\sqrt{ax + b}$	3
6	אינטגרלים המכילים ביטויים מהצורה $ax + b$ וגם $px + q$	4

1 אינטגרלים אלמנטריים ונוסחאות יסוד

$$\int a \, dx = ax \quad (1)$$

$$\int a \cdot f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx \quad (2)$$

$$\int \phi(y) \, dx = \int \frac{\phi(y)}{y'} \, dy \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (3)$$

$$\int (u + v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx \quad (4)$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad (5)$$

$$\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx \quad (6)$$

$$\int f(ax) \, dx = \frac{1}{a} \int f(u) \, du \quad (7)$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1 \quad (8)$$

$$\int \frac{f'(x) \, dx}{f(x)} = \ln f(x) \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x \quad , \text{ or } \ln(-x) \quad (10)$$

$$\int \frac{f'(x) dx}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{f(x)} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (11)$$

$$\int e^x dx = e^x \quad (12)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad (13)$$

$$\int b^{ax} dx = \frac{b^{ax}}{a \ln b} \quad (14)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x \quad (15)$$

$$\int a^x \ln a dx = a^x \quad (16)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \quad (17)$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \quad (19)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \quad (21)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \quad (22)$$

$$\int \tan x dx = -\ln(\cos x) \quad (23)$$

$$\int \cot x dx = \ln(\sin x) \quad (24)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \quad (25)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad (26)$$

$$\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} \quad (27)$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \quad (28)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) \quad (29)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + b}\right) \quad b \neq 0 \quad (30)$$

$$\int \sqrt{x^2 + b} \, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + b} + \frac{b}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + b}\right) \quad b \neq 0 \quad (31)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (32)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\sin^{-1}\frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (34)$$

אינטגרלים המכילים ביטויים מהצורה $ax + b$ 2

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a}\ln(ax + b) \quad (35)$$

$$\int \frac{dx}{(ax + b)^2} = \frac{-1}{a(ax + b)} \quad (36)$$

$$\int \frac{dx}{(ax + b)^3} = \frac{-1}{2a(ax + b)^2} \quad (37)$$

$$\int \frac{x \, dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax + b) \quad (38)$$

$$\int \frac{x^2 \, dx}{ax + b} = \frac{(ax + b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax + b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln(ax + b) \quad (39)$$

$$\int \frac{x^3 \, dx}{ax + b} = \frac{(ax + b)^3}{3a^4} - \frac{3b(ax + b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(ax + b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4}\ln(ax + b) \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{x(ax + b)} = \frac{1}{b}\log\left(\frac{x}{ax + b}\right) \quad (41)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax + b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{ax + b}{x}\right) \quad (42)$$

$$\int \frac{dx}{x^3(ax + b)} = \frac{2ax - b}{2b^2x^2} + \frac{a^2}{b^3}\ln\left(\frac{x}{ax + b}\right) \quad (43)$$

$$\int \frac{x \, dx}{(ax + b)^2} = \frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax + b) \quad (44)$$

$$\int \frac{x^2 \, dx}{(ax + b)^2} = \frac{ax + b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3}(ax + b) - \frac{2b}{a^3}\ln(ax + b) \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 \, dx}{(ax + b)^2} &= \frac{(ax + b)^2}{2a^4} - \frac{3b(ax + b)}{a^4} + \frac{b^3}{a^4(ax + b)} \\ &\quad + \frac{4b^2}{a^4}\ln(ax + b) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\int \frac{dx}{x(ax + b)^2} = \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax + b}\right) + \frac{1}{b(ax + b)} \quad (47)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = \frac{2a}{b^3} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) - \frac{a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2x} \quad (48)$$

$$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^2} = -\frac{3a^2}{b^4} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) - \frac{(ax+b)^2}{2b^4x^2} + \frac{3a(ax+b)}{b^4x} - \frac{a^3x}{b^4(ax+b)} \quad (49)$$

$$\int \frac{x dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{a^2(ax+b)} + \frac{b}{2a^2(ax+b)^2} \quad (50)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^3} = \frac{\ln(ax+b)}{a^3} + \frac{2b}{a^3(ax+b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax+b)^2} \quad (51)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{(ax+b)^3} = \frac{x}{a^3} - \frac{3b^2}{a^4(ax+b)} + \frac{b^3}{2a^4(ax+b)^2} - \frac{3b}{a^4} \ln(ax+b) \quad (52)$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^3} = \frac{a^2x^2}{2b^3(ax+b)^2} - \frac{2ax}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) \quad (53)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^3} = \frac{-a}{2b^2(ax+b)^2} - \frac{2a}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3x} + \frac{3a}{b^4} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) \quad (54)$$

$$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^3} = \frac{a^4x^2}{2b^5(ax+b)^2} - \frac{4a^3x}{b^5(ax+b)} - \frac{(ax+b)^2}{2b^5x^2} - \frac{6a^2}{b^5} \ln \left(\frac{ax+b}{x} \right) \quad (55)$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{(ax+b)^{1-n}}{a(1-n)} \quad n \neq 1 \quad (56)$$

$$\int \frac{x dx}{(ax+b)^n} = -\frac{(ax+b)^{1-n}(anx-ax+b)}{a^2(n-2)(n-1)} \quad n \neq 1, 2 \quad (57)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{-1}{(n-3)(ax+b)^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} \right) \quad n \neq 1, 2, 3 \quad (58)$$

$$\int (ax+b)^n dx = \quad (59)$$

$$\int x^2(ax+b)^n dx = \quad (60)$$

$$\int x^2(ax+b)^n dx = (n+1)a \quad (61)$$

$$\int x^m(ax+b)^n dx = \quad (62)$$

$$\int x^m(ax+b)^n dx = \quad (63)$$

3 אינטגלים המכילים ביטויים מהצורה $\sqrt{ax+b}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax+b)}{a} \quad (64)$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \sqrt{ax+b} \quad (65)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(4a^2x^2 - 4abx + 8b^2)}{15a^3} \sqrt{ax+b} \quad (66)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} \end{cases} \quad (67)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \quad (68)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2\sqrt{ax+b}^3}{3a} \quad (69)$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2} \sqrt{(ax+b)^3} \quad (70)$$

$$\int x^2\sqrt{ax+b} dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)}{105a^3} \sqrt{(ax+b)^3} \quad (71)$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \quad (72)$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \quad (73)$$

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+a)a} \int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}} dx \quad (74)$$

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-3)a}{(2m-2)b} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}} \quad (75)$$

$$\int x^m\sqrt{ax+b} dx = \frac{2x^m}{(2m+3)a} (ax+b)^{3/2} - \frac{2mb}{(2m+3)a} \int x^{m-1}\sqrt{ax+b} dx \quad (76)$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m} = \frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{a}{2(m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}} \quad (77)$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m} = \frac{-(ax+b)^{3/2}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-5)a}{(2m-2)b} \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^{m-1}} dx \quad (78)$$

$$\int (ax+b)^{m/2} dx = \frac{2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a(m+2)} \quad (79)$$

$$\int x(ax+b)^{m/2} dx = \frac{2(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^2(m+4)} - \frac{2b(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)} \quad (80)$$

$$\int x^2(ax+b)^{m/2} dx = \frac{2(ax+b)^{(m+6)/2}}{a^2(m+6)} - \frac{4b(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^3(m+4)} + \frac{2b^2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^3(m+2)} \quad (81)$$

$$\int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x} dx = \frac{2(ax+b)^{m/2}}{m} + b \int \frac{(ax+b)^{(m-2)/2}}{x} dx \quad (82)$$

$$\int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x^2} dx = -\frac{(ax+b)^{(m+2)/2}}{bx} + \frac{ma}{2b} \int \frac{(ax+b)^{m/2}}{x} dx \quad (83)$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)^{m/2}} = \frac{2}{b(m-2)(ax+b)^{(m-2)/2}} + \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x(ax+b)^{(m-2)/2}} \quad (84)$$

4 אינטגרלים המכילים ביטויים מהצורה $ax+b$ וגם $px+q$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \ln \left(\frac{px+b}{ax+b} \right) \quad (85)$$

$$\int \frac{x dx}{(ax+b)(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \left[\frac{b}{a} \ln(ax+b) - \frac{q}{p} \ln(px+q) \right] \quad (86)$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \left[\frac{1}{ax+b} + \frac{p}{bp-aq} \ln \left(\frac{px+q}{ax+b} \right) \right] \quad (87)$$

$$\int \frac{x dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq} \left[\frac{q}{bp-aq} \ln \left(\frac{ax+b}{px+q} \right) - \frac{b}{a(ax+b)} \right] \quad (88)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{b^2}{(bp-aq)a^2(ax+b)} + \frac{1}{(bp-aq)^2} \left[\frac{q^2}{p} \ln(px+q) \right. \quad (89)$$

$$\left. + \frac{b(bp-2aq)}{a^2} \ln(ax+b) \right]$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n} = \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)} \left[\frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} \right. \quad (90)$$

$$\left. + a(m+n-2) \int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^{n-1}} \right]$$

$$\int \frac{ax+b}{px+q} dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2} \ln(px+q) \quad (91)$$

$$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)} \left[\frac{(ax+b)^{m+1}}{(px+q)^{n-1}} \right. \quad (92)$$

$$\left. + (n-m-2)a \int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}} dx \right]$$

$$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n} dx = \frac{-1}{(n-m-1)p} \left[\frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} \right. \quad (93)$$

$$\left. + m(bp-aq) \int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^n} dx \right]$$

$$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)p} \left[\frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma \int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}} dx \right] \quad (94)$$

טבלת האינטגרלים הוכנה ונערכה על ידי גיא רוטנברג עבור סיכומונה - אתר הסיכומים החופשי.
הטבלה נכתבה ונערכה ב־ L^AT_EX וחלק גדול מהאינטגלים חושב בעזרת MAXIMA.