אלגברה לינארית

מטריצות

חיבור	$A+B=[(\alpha_{ij}+\beta_{ij})]_{m\times n}$
מכפלה בסקלר	$\lambda A=[\lambda\alpha_{ij}]_{m\times n}$
מכפלה בסקלר	$A\lambda=[\alpha_{ij}\lambda]_{m\times n}$
קומוטטיב	A + B = B + A
אסוציאטיב	(A + B)+C = A + (B + C)
כפל מטריצות	$A_{m\times n}\bullet B_{n\times q}=C_{m\times q}$
דיסטריבוטיבית	(A + B)C = AC + BC
	C(A + B) = CA + CB
מכפלת מטריצות בסקלר	$\lambda(AB)=(\lambda A)B$
	$\lambda(AB)=A(\lambda B)$
אסוציאטיביות	(AB)C = A(BC)
המטריצה המשוחלפת	$(A^t)^t=A$
	$(\lambda A)^t=\lambda\bullet A^t$
	$(A+B)^t=A^t+B^t$
	$(AB)^t=B^tA^t$
מטריצה סימטרית	$A^t=A$
מטריצה סימטרית	$(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}=A^{-1}$
	$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
חזקה במטריצות	$A^n=A^{n-1}\bullet A$

מטריצות הפיכות

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n.
כל אחת מהטענות שלהלן היא <u>תנאי הכרחי ומספיק להפיכות</u> של A.

א. A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.
ב. A שקולת שורות ל-I.
ג. קיימת מטריצה רגולרית C כך ש- CA=I.
ד. צורת המדרגות הקנונית של A היא I.
ה. לכל וקטור עמודה b מסדר n, קיים <u>פתרון יחיד</u> למשוואה $A\underline{x}=\underline{b}$.
ו. לכל וקטור עמודה b מסדר n, קיים <u>פתרון</u> למשוואה $A\underline{x}=\underline{b}$.
ז. למשוואה $A\underline{x}=\underline{0}$ יש רק פתרון טריויאלי.
ח. העמודות של A, כוקטורים ב- R^n, הן בלתי תלויות לינארית.
ט. השורות של A, כוקטורים ב- R^n, הן בלתי תלויות לינארית.
י. העמודות של A, כוקטורים ב- R^n, פורשות את R^n.
יא. השורות של A, כוקטורים ב- R^n, פורשות את R^n.

נקודות למחשבה:
- ✓ אם הדטרמיננטה שונה מאפס המטריצה הפיכה.
- ✓ שני מטריצות שהכפל שלהם נותן את מטריצה היחידה הפיכות.
- ✓ מטריצה שמורכבת מכפל מטריצות והיא הפיכה אז גם המטריצות הפיכות.

<u>אלגברה לינארית</u>

דטרמיננטות

- ✓ חילופיות $\left|A^t\right| = |A|$
- ✓ תהי A מטריצה ריבועית ותהי C מטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפה של שתי <u>עמודות או שורות</u> זו בזו. $|C| = -|A|$
- ✓ תהי A ו-B מטריצות ריבועיות הנבדלות זן מזו רק בשורה אחת, השורה ה-i. תהי C מטריצה אשר שורתה ה-i היא סכום השורות ה-i של A ושל B ושאר שורותיה שוות לאלו של A (או של B) $|C| = |A| + |B|$
- ✓ תהי A מטריצה ריבועית ותהי B מטריצה המתקבלת מ-A ע"י כפל שורה או עמודה של A בסקלר. $|B| = \lambda|A|$

$|\lambda A| = \lambda^n |A|$

- ✓ אם במטריצה ריבועית A יש שורת או עמודת אפסים, לא הפיכה. $|A| = 0$
- ✓ תהי A מטריצה ריבועית ותהי B מטריצה המטקבלת מ-A ע"י הוספת כפולה של שורה / עמודה כלשהי לשורה / עמודה אחרת $|B| = |A|$
- ✓ לכל שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר, A ו-B $|AB| = |A||B|$
- ✓ תהיינה A ו-B מטריצות המקיימות אז A ו-B שתיהן הפיכות וכל אחת מהן היא ההפכית של האחרת. $A \bullet B = I$
- ✓ אם A הפיכה אז $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$
- ✓ לכל מטריצה A, אם A לא הפיכה שווה אפס $AadjA = adjA \bullet A = |A| \bullet I$
- ✓ לכל מטריצה הפיכה A $|adjA| = |A|^{n-1}$

$|A| = \left|A^t\right|$

$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

וקטורים

חיבור $\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} = (\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2 + \underline{\mathbf{w}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3 + \underline{\mathbf{w}}_3)$

חיסור $\underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{w}} = (\underline{\mathbf{v}}_1 - \underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2 - \underline{\mathbf{w}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3 - \underline{\mathbf{w}}_3)$

כפל בסקלר $k\underline{\mathbf{w}} = (k\underline{\mathbf{w}}_1, k\underline{\mathbf{w}}_2, k\underline{\mathbf{w}}_3)$

אורך וקטור $\|\underline{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\underline{\mathbf{v}}_1{}^2 + \underline{\mathbf{v}}_2{}^2 + \underline{\mathbf{v}}_3{}^2}$

מכפלה סקלרית בין שני וקטורים $\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{v}}_1 \cdot \underline{\mathbf{w}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 \cdot \underline{\mathbf{w}}_2 + \underline{\mathbf{v}}_3 \cdot \underline{\mathbf{w}}_3$

נוסחאת הזווית בין שני וקטורים.
אם הוקטורים נצבים הזווית שווה לאפס.

$$\mathbf{cos}\alpha = \frac{\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{w}}}{\|\underline{\mathbf{v}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{w}}\|}$$

היטל אורתוגנולי של u בכיוון a

$$proj_{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\mathbf{u}} = \frac{\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{a}}}{\|\underline{\mathbf{a}}\|^2} \underline{\mathbf{a}}$$

אלגברה לינארית

אורך ההיטל של u בכיוון a

$$\left\| proj_{\underline{\mathbf{a}}} \underline{\mathbf{u}} \right\| = \frac{\left| \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{a}} \right|}{\left\| \underline{\mathbf{a}} \right\|}$$

מכפלה וקטורית בין שני וקטורים, נורמל למישור שמקביל לשני הוקטורים.

$$\underline{u} \times \underline{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

הגודל של מכפלה וקטורית בין שני וקטורים.

$$\left\| \underline{u} \times \underline{w} \right\| = \left\| \underline{u} \right\| \bullet \left\| \underline{w} \right\| \bullet Sin\phi$$

נפח מקבילון, אם הנפח שווה אפס אז הוקטורים לא על אותו מישור.

$$\left| \underline{a} \bullet (\underline{u} \times \underline{w}) \right|$$

נקרודות , ישריים, מישורים ומרחקים

מרחק בין שני נקודות

$$d = (p_1 - p_2) = \left\| (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \right\|$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

מרחק בין נקודה לישר

$$d = \frac{\left| ax_0 + by_0 - c \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

הגדרת מישור ע"י נקודה ווקטור

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

משוואת המישור הכללית, כאשר a,b,c לא כולם אפס.

$$ax + by + cz = d$$

הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ ומקביל לווקטור $(x, y, z\ )$

$$X = x_0 + xt, Y = y_0 + yt, Z = z_0 + zt$$

המרחק בין נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ למישור

$$D = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 - d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

אלגברה לינארית

הגדרת מרחב לינארי

נניח ש- V הוא קבוצה לא ריקה של איברים, שייקראו וקטורים. ונניח שעל V מוגדרת שתי פעולות:

- חיבור בין וקטורים
- כפל וקטור בסקלר

V ייקרא מרחב לינארי אם מתקיימות התכונות הבאות לכל $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ ולכל d,c סקלרים מתקיימים:

חיבור:

1. סגירות - $\underline{u} + \underline{v} \in V$
2. קיבוציות, אסוציטיביות - $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) \in V$
3. חילופיות, קומטטיביות - $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \in V$
4. וקטור אפס - $\underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u} \in V$
5. איבר נגדי - $\underline{u} \in V \qquad \underline{u} + (-\underline{u}) = (-\underline{u}) + \underline{u} = \underline{0}$

כפל:

1. סגירות – $c\underline{u} \in V$
2. פילוג, דיסטריבוטיביות –
   a. $c(\underline{u} + \underline{v}) = c\underline{u} + c\underline{v}$
   b. $(c + d)\underline{u} = c\underline{u} + d\underline{u}$
3. זהות - $\underline{u} \in V \qquad 1\underline{u} = \underline{u} = \underline{0}$

<u>הגדרת תת מרחב לינארי</u>

נניח ש- W הוא תת מרחב של V. מספיק לבדוק ש- W מקיים שלושה תנאים כדי לוודא שהוא אכן תת מרחב.

1. סגירות כפל בסקלר וחיבור. $\alpha\underline{u} + \underline{v} \in W$
2. קיום איבר אפס.

אם ניתן להגדיר קבוצת וקטורים שפורסת את W אז W תת מרחב.

אלגברה לינארית

צירופים לינארים

יהי V מרחב לינארי $A=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3.....\underline{v}_n\}$ קבוצת וקטורים מ- V. וקטור $\underline{w}\in V$ נקרא צירוף לינארי של קבוצה A אם קיימים סקלרים $c_1,c_2,c_3.....c_n$ כך ש- $\underline{w}=\sum_{i=1}^{n}c_i\underline{v}_i$

את קבוצת כל הצירופים הלינארים של איברי A נסמן Spam(A).
Spam(A) תת מרחב של V. נאמר ש- A פורשת את V אם V = Spam(A).

<u>קבוצה בלתי תלויה:</u>

קבוצה A בלתי תלויה לינארית אם מהשיווין $\sum_{i=1}^{n}c_i\underline{v}_i=\underline{0}$ נובע $c_1=c_2=c_3.....c_n=0$ כלומר אם לא ניתן להציג את $\underline{0}$ כצירוף לינארי לא טריוויאלי של איברי A.

<u>קבוצה תלויה:</u>

קבוצה A תלויה לינארית אם קיימים סקלרים $c_1,c_2,c_3.....c_n$ שלא כולם אפס כך ש- $\underline{0}=\sum_{i=1}^{n}c_i\underline{v}_i$

כלומר אם ניתן להציג $\underline{0}$ כצירוף לינארי לא טריוויאלי של איברי A.

<u>משפטים:</u>

- A תלויה אם ורק אם קיים ב- A וקטור שהוא צירוף לינארי של הוקטורים האחרים ב- A.
- ב - R^n כל קבוצה בעלת יותר מ- n וקטורים היא תלויה לינארית.

<u>בסיס:</u>

נניח ש-V הוא מרחב לינארי. $B=\{v_1,v_2,v_3.....v_n\}$ כך ש-B חלקית ל-V, נאמר ש-B היא בסיס של V אם:

1. B בלתי תלויה.
2. B פורשת את V.

<u>מימד:</u>

אם ל-V יש בסיס שיש בו n וקטורים, אומרים ש-V הוא ממימד n, ורושמים $\dim V=n$.
דוגמאות: $\dim M_{mxn}=mxn$, $\dim P^n=n+1$, $\dim R^n=n$

<u>וקטור הקורדינטות:</u>

וקטור הקורדינטות של $\underline{v}$ ביחס לבסיס $B=\{v_1,v_2,v_3.....v_n\}$ הוא $[\underline{v}]_B=(c_1,c_2,c_3.....c_n)$.
לכל $x\in R^n$, כאשר E הבסיס הסטנדרטי אז $[x]_E=x$.

אלגברה לינארית

בסיסים וממד

משפטים:

✓ נתונים $v_1, v_2, v_3.....v_{k+1}$ וקטורים במרחב לינארי V. נסמן:

$B_{k+1} = \{v_1, v_2, v_3.....v_{k+1}\}$ ו- $B_k = \{v_1, v_2, v_3.....v_k\}$

א. אם B_k בלתי תלוי לינארית ו- $\underline{v}_{k+1} \neq Spam(B_k)$ אז B_{k+1} בלתי תלוי לינארית.

ב. אם $Spam(B_{k+1}) = W$ ואם $\underline{v}_{k+1} \in Spam(B_{k+1})$ אז $Spam(B_k) = W$.

✓ נתון $\dim(\mathrm{V}) = n$.

א. כל קבוצה של n וקטורים בת"ל ב-V היא בסיס של V.

ב. כל קבוצה של n וקטורים שפורשת את V היא בסיס של V.

ג. מכל קבוצה פורשת אפשר לקבל בסיס ע"י זריקת וקטור מתוך הקבוצה. ומכל קבוצה בת"ל אפשר לקבל בסיס ע"י הוספת וקטורים לקבוצה.

✓ נתון ש-V מרחב לינארי ממימד סופי, W תת מרחב של V.

א. $\dim(\mathrm{W}) \leq \dim(\mathrm{V})$

ב. $\dim(\mathrm{W}) = \dim(\mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{W}=\mathrm{V}$

מרחב השורות, מרחב העמודות ומרחב האפס של מטריצה

משפטים:

✓ $A\underline{x} = b$ קונסיסטנטית אם ורק אם שייך למרחב העמודות של A.

הפתרון הכללי של ההומגנית + פתרון פרטי של האי הומגנית = פתרון הכללי של האי-הומגנית.

✓ נתון ש-A, B שקולות שורות אז:

א. קבוצת העמודות של A היא בת"ל אם ורק אם קבוצת העמודות המתאימה של B היא בת"ל.

ב. קבוצת העמודות של A היא בסיס של מרחב העמודות של A אם ורק אם קבוצת העמודות המתאימה של B היא בסיס של מרחב העמודות של B.

✓ נתון M מטריצה מדרגות:

א. השורות שיש בהן איבר פותח יוצרות בסיס למרחב השורות של M.

ב. העמודות שיש בהן איבר פותח יוצרות בסיס למרחב העמודות של M.

✓ $Rank(A) + nulltiy(A) = n$

✓ $\mathrm{Rank(A)} = \mathrm{Rank}(\mathrm{A}|\underline{\mathrm{b}}) \Leftrightarrow \mathrm{A}\underline{\mathrm{x}} = \underline{\mathrm{b}}$

✓ $Rank(A^T) = Rank(A)$

✓ נתון: $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{mxn}}$ $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\mathrm{nxp}}$ אז

$$Rank(AB) \leq Rank(A)$$
$$Rank(AB) \leq Rank(B)$$

אלגברה לינארית

חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים

- ✓ $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$
- ✓ $V=U\oplus W \quad \Leftrightarrow \quad \dim(V)=\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W$
- ✓ אם U, W תת-מרחבים של V, אז- U+W תת-מרחב של V.
- ✓ $V=U\oplus W$ אז לכל $\underline{v}\in V$ קיימת הצגה יחידה בסכום $V=U\oplus W$.

טרנספורמציה לינאריות

- ✓ נתון V ,W מרחבים לינארים, הפונקציה $T:V\to W$ נקראת טרנספורמציה לינארית אם היא מקיימת:
  א. לכל $\underline{u},\underline{v}\in V$ $\qquad T(\underline{u}+\underline{v})=T\underline{u}+T\underline{v}$
  ב. לכל $\underline{v}\in V$, $k\in R$ $\qquad T(k\underline{v})=kT\underline{v}$

- ✓ נתון A מטריצה מסדר m_xn, המשוואה הנ"ל מגדירה טרנ"ס $T\underline{x}=A\underline{x} \quad T:R^n\to R^m$
- ✓ נתון $T:U\to V \; and \; S:V\to W$ אז ST היא גם טרנ"ס.
- ✓

$$T:V\to W$$
$$\ker T=\{\underline{v}\in V \mid T\underline{v}=\underline{0}\}$$
$$\operatorname{Im} T=\{T\underline{v}\mid \underline{v}\in V\}$$