<u>מרחבים ליניאריים</u>

הגדרת מרחב לינארי

נניח ש- V הוא קבוצה לא ריקה של איברים, שייקראו וקטורים. ונניח שעל V מוגדרת שתי פעולות:

- חיבור בין וקטורים
- כפל וקטור בסקלר

V ייקרא מרחב לינארי אם מתקיימות התכונות הבאות לכל $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ ולכל d,c סקלרים מתקיימים:

חיבור:

1. סגירות - $\underline{u} + \underline{v} \in V$
2. קיבוציות, אסוצייטיביות - $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) \in V$
3. חילופיות, קומטטיביות - $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \in V$
4. וקטור אפס - $\underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u} \in V$
5. איבר נגדי - $\underline{u} \in V \qquad \underline{u} + (-\underline{u}) = (-\underline{u}) + \underline{u} = \underline{0}$

כפל:

1. סגירות – $c\underline{u} \in V$
2. פילוג, דיסטריבוטיביות –
   a. $c(\underline{u} + \underline{v}) = c\underline{u} + c\underline{v}$
   b. $(c + d)\underline{u} = c\underline{u} + d\underline{u}$
3. זהות - $\underline{u} \in V \qquad 1\underline{u} = \underline{u} = \underline{0}$

<u>הגדרת תת מרחב לינארי</u>

נניח ש- W הוא תת מרחב של V. מספיק לבדוק ש- W מקיים שלושה תנאים כדי לוודא שהוא אכן תת מרחב.

1. סגירות כפל בסקלר וחיבור. $\alpha\underline{u} + \underline{v} \in W$
2. קיום איבר אפס.

אם ניתן להגדיר קבוצת וקטורים שפורסת את W אז W תת מרחב.

מרחבים ליניאריים

צירופים לינארים

יהי V מרחב לינארי $A=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3.....\underline{v}_n\}$ קבוצת וקטורים מ- V. וקטור $\underline{w}\in V$ נקרא צירוף לניארי של קבוצה A אם קיימים סקלרים $c_1,c_2,c_3.....c_n$ כך ש- $\underline{w}=\sum_{i=1}^{n}c_i\underline{v}_i$

את קבוצת כל הצירופים הלינארים של איברי A נסמן Spam(A).
Spam(A) תת מרחב של V. נאמר ש- A פורשת את V אם V = Spam(A).

קבוצה בלתי תלויה:

קבוצה A בלתי תלויה לינארית אם מהשיוון $\sum_{i=1}^{n}c_i\underline{v}_i=\underline{0}$ נובע $c_1=c_2=c_3.....c_n=0$ כלומר אם לא ניתן להציג את $\underline{0}$ כצירוף לינארי לא טריוויאלי של איברי A.

קבוצה תלויה:

קבוצה A תלויה לינארית אם קיימים סקלרים $c_1,c_2,c_3.....c_n$ שלא כולם אפס כך ש- $\underline{0}=\sum_{i=1}^{n}c_i\underline{v}_i$

כלומר אם ניתן להציג $\underline{0}$ כצירוף לינארי לא טריוויאלי של איברי A.

משפטים:

- A תלויה אם ורק אם קיים ב- A וקטור שהוא צירוף לינארי של הוקטורים האחרים ב- A.
- ב - R^n כל קבוצה בעלת יותר מ- n וקטורים היא תלויה לינארית.

בסיס:

נניח ש-V הוא מרחב לינארי. $B=\{v_1,v_2,v_3.....v_n\}$ כך ש-B חלקית ל-V, נאמר ש-B היא בסיס של V אם:

1. B בלתי תלויה.
2. B פורשת את V.

מימד:

אם ל-V יש בסיס שיש בו n וקטורים, אומרים ש-V הוא ממימד n, ורושמים $\dim V=n$.
דוגמאות: $\dim M_{mxn}=mxn \qquad \dim P^n=n+1, \qquad \dim R^n=n,$

וקטור הקורדינטות:

וקטור הקורדינטות של $\underline{v}$ ביחס לבסיס $B=\{v_1,v_2,v_3.....v_n\}$ הוא $[\underline{v}]_B=(c_1,c_2,c_3.....c_n)$.
לכל $x\in R^n$, כאשר E הבסיס הסטנדרטי אז $[x]_E=x$.

מרחבים ליניאריים

בסיסים וממד

משפטים:

- ✓ נתונים $v_1, v_2, v_3.....v_{k+1}$ וקטורים במרחב לינארי V. נסמן:
  $B_{k+1} = \{v_1, v_2, v_3.....v_{k+1}\}$ ו- $B_k = \{v_1, v_2, v_3.....v_k\}$
  א. אם B_k בלתי תלוי לינארית ו- $\underline{v}_{k+1} \neq Spam(B_k)$ אז B_{k+1} בלתי תלוי לינארית.
  ב. אם $Spam(B_{k+1}) = W$ ואם $\underline{v}_{k+1} \in Spam(B_{k+1})$ אז $Spam(B_k) = W$.

- ✓ נתון $\dim(\mathrm{V}) = n$.
  א. כל קבוצה של n וקטורים בת"ל ב-V היא בסיס של V.
  ב. כל קבוצה של n וקטורים שפורשת את V היא בסיס של V.
  ג. מכל קבוצה פורשת אפשר לקבל בסיס ע"י זריקת וקטור מתוך הקבוצה. ומכל קבוצה בת"ל אפשר לקבל בסיס ע"י הוספת וקטורים לקבוצה.

- ✓ נתון ש-V מרחב לינארי ממימד סופי, W תת מרחב של V.
  א. $\dim(\mathrm{W}) \leq \dim(\mathrm{V})$
  ב. $\dim(\mathrm{W}) = \dim(\mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{W=V}$

מרחב השורות, מרחב העמודות ומרחב האפס של מטריצה

משפטים:

- ✓ $A\underline{x} = b$ קונסיסטנטית אם ורק אם שייך למרחב העמודות של A.
  הפתרון הכללי של ההומגנית + פתרון פרטי של האי הומגנית = פתרון הכללי של האי-הומגנית.

- ✓ נתון ש-A, B שקולות שורות אז:
  א. קבוצת העמודות של A היא בת"ל אם ורק אם קבוצת העמודות המתאימה של B היא בת"ל.
  ב. קבוצת העמודות של A היא בסיס של מרחב העמודות של A אם ורק אם קבוצת העמודות המתאימה של B היא בסיס של מרחב העמודות של B.

- ✓ נתון M מטריצה מדרגות:
  א. השורות שיש בהן איבר פותח יוצרות בסיס למרחב השורות של M.
  ב. העמודות שיש בהן איבר פותח יוצרות בסיס למרחב העמודות של M.

- ✓ $Rank(A) + nulltiy(A) = n$

- ✓ $\mathrm{Rank(A) = Rank(A|\underline{b})} \Leftrightarrow \mathrm{A\underline{x} = \underline{b}}$

- ✓ $Rank(A^T) = Rank(A)$

- ✓ נתון: $\mathrm{A \in M_{mxn}}$ $\mathrm{B \in M_{nxp}}$ אז
  $Rank(AB) \leq Rank(A)$
  $Rank(AB) \leq Rank(B)$

מרחבים ליניאריים

חיתוך, סבום וסכום ישר של תת-מרחבים

- ✓ $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$
- ✓ $\dim(V)=\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W \quad\Leftrightarrow\quad V=U\oplus W$
- ✓ אם U, W תת-מרחבים של V, אז- U+W תת-מרחב של V.
- ✓ $V=U\oplus W$ אז לכל $\underline{v}\in V$ קיימת הצגה יחידה בסכום $V=U\oplus W$.

טרנספורמציה לינאריות

- ✓ נתון V, W מרחבים לינארים, הפונקציה $T:V\to W$ נקראת טרנספורמציה לינארית אם היא מקיימת:
  א. לכל $\underline{u},\underline{v}\in V$ $\quad T(\underline{u}+\underline{v})=T\underline{u}+T\underline{v}$
  ב. לכל $\underline{v}\in V$, $k\in R$ $\quad T(k\underline{v})=kT\underline{v}$

- ✓ נתון A מטריצה מסדר $m{\scriptstyle x}n$, המשוואה הנ"ל מגדירה טרנ"ס $T\underline{x}=A\underline{x}$ $\quad T:R^n\to R^m$
- ✓ נתון $S:V\to W$ and $T:U\to V$ אז ST היא גם טרנ"ס.
- ✓

$$T:V\to W$$
$$\ker T=\{\underline{v}\in V \mid T\underline{v}=\underline{0}\}$$
$$\operatorname{Im} T=\{T\underline{v}\mid \underline{v}\in V\}$$

- ✓ משפט המימד לטרנספורמציות לינאריות.

$$T:V\to W,\ \dim V=n$$
$$\dim(\operatorname{Im} T)+\dim(\ker T)=n$$
$$nullity(T)+rank(T)=n$$

- ✓ T חד חד ערכית אם ורק אם $\ker T=\{\underline{0}\}$.
- ✓ $T:V\to V$ טרנס' לינארית V מימד סופי אז T חח"ע אם ורק אם T על.
- ✓ $T:V\to W$ טרנס' לינארית חח"ע ועל אז היא הפיכה ולכן, $T\underline{v}=\underline{w}\Leftrightarrow T^{-1}\underline{w}=\underline{v}$.
- ✓ הרכבה של טרנס' לינארית הפיכות מתקבל, $ST^{-1}=T^{-1}S^{-1}$.
- ✓ $[T\underline{v}]_B=[T]_{B'B}\times[\underline{v}]_B$.
- ✓ $[ST]_{B''B}=[S]_{B''B'}\times[T]_{B'B}$.
- ✓ אם $T:V\to V$ טרנס' לינארית ו-B בסיס של V אז T הפיכה אם ורק אם $[T]_B$ הפיכה, ומתקיים $[T^{-1}]_B=[T]_B^{-1}$.