דוגמאות לפתרון משוואות נפרדות

גיא רוטנברג ־ http://www.sikumuna.co.il

אוגוסט 2006

מסמך זה מכיל דוגמאות שמהוות השלמה לסיכום בנושא משוואה נפרדה שכתבתי שמתפרסם אף הוא בסיכומונה ־ אתר הסיכומים החופשי[1].

דוגמא 1 פתור את המשוואה $xy' = y + 1$

ניתן להביא את המשוואה ללא מאמץ מיוחד לצורה

$$y' = \frac{1}{x}(y+1)^2$$

ניתן להבחין בקלות שזו משוואה נפרדה ולכן בהתאם לכך נחלק ב־ $(y+1)^2$ את המשוואה ונרשום בצד את הפתרון הסינגולרי $y(x) \equiv -1$. קיבלנו אפוא

$$\frac{y'}{(y+1)^2} = \frac{1}{x}$$

או בכתיב דיפרנציאלי

$$\frac{dy}{(y+1)^2} = \frac{dx}{x}$$

נבצע אינטגרציה על שני צדדיו של השיוויון האחרון ונקבל

$$\begin{aligned} \frac{-1}{y+1} &= \ln(x) + C \\ y+1 &= \frac{-1}{ln(x)+C} \\ y &= \frac{-1}{ln(x)+C} - 1 \end{aligned}$$

קיבלנו את הפתרון הכללי של המשוואה. אם נאחד את את הפתרון הכללי עם הפתרון הסינגולרי שקיבלנו מקודם נקבל את אוסף כל הפתרונות של המשוואה.

דוגמא 2 פתור את הבעיית ההתחלה הבאה

$$\begin{aligned} e^x dx - (1+e^x) y dy &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

[1] http://www.sikumuna.co.il

ניתן לסדר את המשוואה בקלות בצורה

$$ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

שממנה ברור שהמשוואה אכן משוואה נפרדה. כמו כן במקרה שלנו $Y(x) = \frac{1}{y}$ וכיוון שלכל פונקציה y מתקיים $\frac{1}{y}$ שונה מאפס אז אין פתרונות סינגולריים.

נמצא את הפתרון הכללי נבצע אינטגרציה על שני צדדי המשוואה הקודמת ונקבל

$$\begin{aligned}
\int^y tdt &= \int^x \frac{e^u}{1+e^u}du + C \\
\frac{1}{2}y^2 &= \ln(e^x+1) + C \\
y &= \sqrt{2\ln(e^x+1)+C}
\end{aligned}$$

קל לאמת את הפתרון הכללי על ידי בדיקה.

נמצא את הפתרון הפרטי פשוט על ידי הצבה של $y(0) = 1$ בפתרון הכללי. נקבל את המשוואה

$$\begin{aligned}
y(0) = \sqrt{2\ln(e^0+1)+C} &= 1 \\
2\ln(2) + C &= 1 \\
1 - 2\ln 2 &= C
\end{aligned}$$

נציב את C שחישבנו בפתרון הכללי על מנת לקבל את הפתרון הפרטי כלומר נקבל

$$y = \sqrt{2\ln(e^x+1) + 1 - 2\ln 2} = \sqrt{1 + 2\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)}$$

ובכך פתרנו את בעיית ההתחלה.

דוגמא 3 נתון שהפונקציה y מקיימת את התנאי הבא: השיפוע של הגרף הפונקציה בכל נקודה שווה למכפלת הריבועים של שיעורי הנקודה. כמו כן נתון שגרף הפונקציה עובר בנקודה $(-1, -\frac{3}{2})$.

מהנתון הראשון נקבל את הממשוואה הדיפרנציאלית

$$y' = x^2y^2$$

ניתן להבחין בקלות כי זו משוואה נפרדה. נסדר את המשוואה מחדש ונעבור לכתיב דיפרנציאלי

$$\frac{dy}{y^2} = x^2dx$$

הפתרון הסינגולרי הוא $y(x) \equiv 0$. נבצע אינטגרציה על שני חלקי המשוואה ונקבל

$$\begin{aligned}
\int^y \frac{dt}{t^2} &= \int^x u^2du + C \\
\frac{-1}{y} &= \frac{x^3}{3} + C \\
y &= \frac{-3}{x^3+3C}
\end{aligned}$$

ניתן לראות שהפתרון הסינגולרי אינו מקיים את תנאי ההתחלה ולכן נציב את תנאי ההתחלה בפרון הכללי ונקבל משוואה שהנעלם שלה הוא C.

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2} &= \frac{-3}{-1+3C} \\
2 &= -1+3C \\
C &= 1
\end{aligned}$$

כלומר הפונקציה המבוקשת היא

$$y = \frac{-3}{x^3+3}$$