

נוסחת השורשים

גיא רוטנברג - <http://www.sikumuna.co.il>

ספטמבר 2006

נניח שיש לנו משוואה ממעלה שניה כלומר משוואה מהצורה

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

כאשר $a \neq 0$. אנו יוכלים לנסות לפתור אותה על ידי הוצאת גורם משותף או טרינום אך בפעמים רבות נגלה שאין אנו מסוגלים לפתור משוואה כזאת בעזרת טרינום. אין פירוש הדבר שאין דרך לפתור את המשוואה, דווקא ישנה דרך פשוטה מאוד שאינה דורשת הרבה מאמץ.

1 נוסחת השורשים

על מנת לפתור את המשוואה (1) כל שעלינו לעשות הוא להציב את a, b, c בנוסחת השורשים ונקבל ישר את פתרונות המשוואה. נוסחת השורשים נראית כך

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

הביטוי $b^2 - 4ac$ שנמצא מתחת לשורש נקרא הדיסקרימיננטה של המשוואה ומסומן בדרך כלל על ידי האות היוונית דלתא δ . כאשר אנו מציבים את המספרים במשוואה נשים לב שאותה נוסחה משמשת אותנו לקבל את שני פתרונות המשוואה. על מנת לקבל את הפתרון הראשון נחבר את השורש ועל מנת לקבל את הפתרון השני נחסר אותו. ה"1, 2 ליד ה" x מסמלים את שני הפתרונות האלו בהתאמה. ניתן לדעת את מספר הפתרונות של המשוואה במהירות על ידי התבוננות בדיסקרימיננטה שלה. נחלק לשלושה מקרים:

1. $b^2 - 4ac > 0$ במקרה זה שבו הדיסקרימיננטה גדולה ממש מאפס יש למשוואה שני פתרונות כלומר שני שורשים שונים.

2. $b^2 - 4ac = 0$ במקרה זה שבו הדיסקרימיננטה מתאפסת יש למשוואה רק שורש אחד.

3. $b^2 - 4ac < 0$ במקרה זה הדיסקרימיננטה שלילית ולמשוואה אין אף פתרון ממשי. אין זה מפתיע כיוון שנוסחה דורשת למצוא את השורש של הדיסקרימיננטה ואילו השורש אינו מוגדר עבור מספרים שליליים.

2 הוכחת נוסחת השורשים

כמה מכם בוודאי תוהים למה בדיוק הנוסחה המוזרה הזו עובדת. בשביל כל אילו שתוהים נוכיח את הנוסחה בטכניקה שנקראת "השלמה לריבוע".
נזכר במשוואה הריבועית:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

זכור אמרנו ש- $a \neq 0$ ולכן נוכל לכפול את שני צדדי המשוואה ב- $4a$ ונקבל

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

נעביר את $4ac$ אגף ונוסיף לשני אגפי המשוואה b^2 ונקבל

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

נשתמש בנוסחאות הכפל המקוצר¹ על מנת לפשט את אגף שמאל ונקבל

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

נוציא שורש ריבועי משני אגפי המשוואה ונקבל

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

מכאן בידודו של x הוא פשוט ועל ידי העברת ה- b אגף וחלוקה ב- $2a$ (זכור כי $a \neq 0$) נקבל

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

כנדרש.

אין צורך לדעת או לזכור את ההוכחה הזו, מה שחשוב הוא לזכור את נוסחת השורשים עצמה.

3 דוגמאות

דוגמא 1 פתור את המשוואה $x^2 + 10x + 9 = 0$

פתרון נפתור את המשוואה על ידי הצבה בנוסחת השורשים נשים לב כי $c = 9$, $b = 10$, $a = 1$.

$$x_{1,x} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2}$$

מכאן נקבל כי

$$x_1 = \frac{-10 + 8}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{-10 - 8}{2} = -9$$

ומצאנו את שני פתרונות המשוואה.

¹נוסחת הכפל המקוצר בה נשתמש היא $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

דוגמא 2 פתור את המשוואה $x^2 - 6x + 17 = 0$

פתרון במקרה זה $a = 1$, $b = -6$, $c = 17$. הדיסקרימיננטה ($b^2 - 4ac$) שלילית במקרה זה ולכן אין פתרון. אם לא ראינו שהדיסקרימיננטה שלילית פשוט נציב במשוואה ונקבל

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

קיבלנו ביטוי שלילי מתחת לשורש, מכאן שאין פתרון ממשי למשוואה.

דוגמא 3 פתור את המשוואה $3x^2 + 9x + 6.75 = 0$

פתרון במקרה זה $a = 3$, $b = 9$, $c = 6.75$. למשוואה יהיה פתרון אחד כיוון שהדיסקרימיננטה אפסה. נמצא את הפתרון היחיד על ידי הצבה בנוסחת השורשים.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6.74}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

קיבלנו רק פתרון אחד ומכאן שזהו גם הפתרון היחיד למשוואה.

נכתב על ידי גיא רוטנברג עבור סיכומנה - אתר הסיכומים החופשי. סיכום זה נכתב ונערך ב־ $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_E\text{X}$.